06/12/2018

(xiii) Αν $x>0$ και $y>0$ τότε $x+y>0$

<u>Απόδειξη</u>: $x>0 \xrightarrow{R/2} x+y>0+y$

$x+y>y$

$\left.\right\}$ $x+y>0$

xiv) Αν $x>0$ και $y>0$ τότε $x.y>0$

<u>Απόδειξη</u>: $x>0 \xrightarrow[R/3]{y>0} xy>0y$

(xv) Αν $x>0$ τότε $-x<0$

Αν $x<0$ τότε $-x>0$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $x>0 \Leftrightarrow x+(-x)>0+(-x)$

$\Rightarrow 0>-x$

$\Rightarrow -x<0$

Αν $x<0 \Leftrightarrow x+(-x)<0+(-x) \Leftrightarrow 0<-x \Leftrightarrow -x>0$

(xvi) Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$ ισχύει $\alpha.\alpha>0$

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον $\alpha\neq 0$ από το $(R10)$ έχουμε ότι $\alpha>0$ ή $\alpha<0$

Αν $\alpha>0$ τότε από (iv) $\alpha\alpha>0$.

Αν $\alpha<0$ τότε $-\alpha>0$ άρα $(-\alpha)(-\alpha)>0$ (xiv)

δηλ. $\alpha\alpha>0$ (xi)

(xvii) $1>0$

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον $1\neq 0$ (από $R7$) από το (xvi) προκύπτει $1\cdot 1>0$. Όμως $1.1>0$ άρα $1>0$.

(xviii) Αν $x>0$ τότε $x^{-1}>0$

Αν $x<0$ τότε $x^{-1}<0$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x>0$ Τότε $x\neq 0$ άρα υπάρχει το x^{-1}. Από το $(R10)$ ισχύει ακριβώς μια από τις τρεις $x^{-1}>0$, $x^{-1}=0$, $x^{-1}<0$

Αν $x^{-1}=0$ τότε $xx^{-1}=0\cdot x^{-1} \Rightarrow 1=0$ άτοπο

Αν $x^{-1}<0$ τότε αφού $x>0$

$x^{-1}x<0x \Rightarrow 1<0$ άτοπο

Άρα $x^{-1}>0$

(β) Ομοίως

Ορισμός: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ορίζουμε την απόλυτη τιμή του x ως εξής

$$|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$$

Συμβολισμός: $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}, x>0\}$

$\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}, x<0\}$

Οι πράξεις "αφαίρεση" και "διαίρεση" ορίζονται ως εξής

$a-b=a+(-b)$

Για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ με $b\neq 0$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$"

$$\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1} \quad \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$$

Πρόταση: Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum

Απόδειξη: Έχουμε δείξει γενικά ότι σε οποιοδήποτε μερικά διατεταγμένο χώρο $(X,\leq)$ ισχύει η εξής ισοδυναμία (i⇔ii)

(α) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του X έχει supremum

(3) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του X έχει infimum.
Έτσι εφόσον στο $\mathbb{R}$ από το αξίωμα πληρότητας ισχύει το (2),
θα ισχύει και το (ii)

<u>Απόδειξη:</u> Έστω A ένα μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω a ένα κάτω φράγμα του A. Δηλ. $a \leq x \ \forall x \in A$

Θέτουμε $B = \{-x : x \in A\}$

Για κάθε $x \in A$ ισχύει $a \leq x \Rightarrow -x \leq -a$

Άρα ο αριθμός $-a$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου B.
Το B είναι μη κενό και άνω φραγμένο άρα από το αξίωμα της πληρότητας (R14) έχει supremum.

Θέτουμε $s = \sup B$

Θα αποδείξουμε ότι το $-s$ έχει infimum του A

(i) Εφόσον $s = \sup B$. Το s είναι άνω φράγμα του B

άρα $-x \leq s \ \forall x \in A$

$\Rightarrow -s \leq x \ \forall x \in A$

Άρα το $-s$ είναι κάτω φράγμα του A

(ii) Έστω s' ένα κάτω φράγμα του A. Τότε $s' \leq x \ \forall x \in A$.

$\Leftrightarrow -x \leq -s' \ \forall x \in A$. Άρα το $-s'$ είναι άνω φράγμα του B

Εφόσον $s = \sup B$ προκύπτει $s \leq -s'$

$\Leftrightarrow s' \leq -s$

Επομένως, $-s = \inf A$

Πρόταση: (ε- χαρακτηρισμός του supremum)

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(1) $s = \sup A$

(2) (i) Το s είναι άνω φράγμα του A

(ii) Για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $x\in A$ ώστε $x > s-\varepsilon$

(1) $\Rightarrow$ (2) Υποθέτουμε ότι $s=\sup A$. Από τον ορισμό του supremum το s είναι άνω φράγμα του A, δηλ. ισχύει το (2)

Αν δεν ~~υπάρχει~~ ισχύει το (ii) υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει $x\leq s-\varepsilon$

Άρα το $s-\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A

Επειδή $s=\sup A$ προκύπτει $s\leq s-\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon\leq 0$ άτοπο

Άρα ισχύει (ii).

(2) $\Rightarrow$ (1) Από το (i) το s είναι άνω φράγμα του A.

Έστω s' ένα άνω φράγμα του A και θα δείξουμε $s\leq s'$

Αν αυτό δεν ισχύει τότε $s>s'$ άρα $s-s'>0$

Θέτουμε $\varepsilon = s-s'$

Από το (ii) υπάρχει $x\in A$ ώστε $x>s-\varepsilon$ δηλ. $x>s-(s-s')$

άρα $x>s'$ άτοπο διότι το s' είναι άνω φράγμα του A.

Επομένως $s=\sup A$.

Πρόταση: (ε- χαρακτηρισμός του supremum)

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ $A\neq\emptyset$ $p\in\mathbb{R}$

Τ.Α.Ε.Ι. (1) $p=\inf A$

(2) (i) Το p είναι κάτω φράγμα του A

(ii) $\forall\varepsilon>0$ $\exists x\in A$ με $x<p+\varepsilon$.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται επαγωγικό αν (i) $1 \in A$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ αν $x \in A$ τότε $x+1 \in A$

Παρατηρήσεις:

(α) Το $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο

(β) Το σύνολο $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ x > 0\}$ είναι επαγωγικό.

Απόδειξη:

$1 > 0$ άρα $1 \in \mathbb{R}^+$

Αν $x \in \mathbb{R}^+$ τότε $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0+1$

$x+1 > 0 \xrightarrow{1>0} x+1 > 0 \Leftrightarrow x+1 \in \mathbb{R}^+$

(γ) Η τομή επαγωγικών συνόλων είναι επαγωγικό σύνολο

Απόδειξη: Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια επαγωγικών συνόλων τότε το $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι επαγωγικό.

→ $1 \in A_i \ \forall i \in I$ (διότι A_i επαγωγικό $\forall i \in I$)

άρα $1 \in \bigcap_{i \in I} A_i$

→ Αν $x \in \bigcap_{i \in I} A \Rightarrow x \in A_i \ \forall i \in I \xrightarrow{A_i \text{ επαγωγικό}} x+1 \in A_i \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i$

Παράδειγμα:

Έστω N η συλλογή όλων των επαγωγικών συνόλων του $\mathbb{R}$

Ορίζουμε $\mathbb{N} = \bigcap N$ και ονομάζουμε το $\mathbb{N}$ σύνολο των φυσικών αριθμών.

Παρατηρήσεις:

(α) Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο (ως τομή επαγωγικών) αν $x \in A$ τότε $x+1 \in A$.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι επαγωγικό τότε $A \in \mathcal{A}$ άρα $\cap \mathcal{A} \subseteq A$ άρα $\mathbb{N} \subseteq A$. Έτσι το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο.

Θεώρημα: (Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών)
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n > x$.

→ Ισοδύναμα: το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $n \leq x \ \forall n \in \mathbb{N}$. δηλ. το x είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$.
Έτσι το $\mathbb{N}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο άρα από το αξίωμα της πληρότητας έχει supremum.
Θέτουμε $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Επειδή $1 > 0$ θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha - 1 < n \Rightarrow \alpha < n+1$.
Επειδή το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό και $n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει $n+1 \in \mathbb{N}$
Έτσι $n+1 \in \mathbb{N}$ και $n+1 > \alpha = \sup \mathbb{N}$ άτοπο.